



Cálculo multivariado
Curvas com gnuplot

T. Praciano-Pereira

alun@:

15 de abril de 2013

Lista numero 04

tarcisio.praciano@gmail.com

Dep. de Computação

Univ. Estadual Vale do Acaraú

sis. op. Debian/Gnu/Linux

Documento escrito com \LaTeX

www.multivariado.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção. Alternativamente, resolva a lista diretamente na página do Moodle da Sobral Matematica.

Esta lista ainda está sendo editada, quando estiver pronta esta observação irá desaparecer. Não imprima enquanto esta observação estiver presente.

Exercícios 1 *Curvas com gnuplot objetivo: Entender como gnuplot produz curvas e aprender a colocar uma curva sobre uma superfície no espaço (e ver o gráfico).*

palavras chave: *Curvas, curvas no espaço, derivada implícita, gnuplot e curvas, gradiente, integral de curvas, regra da cadeia*

1. *Curvas com gnuplot* Sendo $z = F(x, y) = x^2 - y^2$ uma função diferenciável e $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ então

(a) $(V)(F)$ $F(\alpha(t))$ é um círculo no espaço 3D quando $t \in [-\pi, \pi]$

(b) $(V)(F)$ $(\alpha(t), F(\alpha(t)))$ é uma curva no espaço cuja projeção sobre o plano XOY é o círculo trigonométrico.

(c) $(V)(F)$ Com auxílio de um programa posso construir os pontos $(\alpha(t), F(\alpha(t)))$ fazendo t variar de acordo com um passo δ e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do gnuplot
`plot "dados" with points`
 irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão.

(d) $(V)(F)$ Com auxílio de um programa posso construir os pontos $(\alpha(t), F(\alpha(t)))$ fazendo t variar de acordo com um passo δ e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do gnuplot irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão:

`splot "dados" with points`

(e) $(V)(F)$ Com auxílio de um programa posso construir os pontos $(\alpha(t), F(\alpha(t)))$ fazendo t variar de acordo com um passo δ e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do gnuplot irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão

`splot F(x,y), "dados" with points`

2. regra da cadeia

Considere $z = F(x, y)$ e $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada no intervalo I

(a) $(V)(F)$ $\gamma(t) = F(\alpha(t))$ é uma curva plana como sugere a sucessão de comandos do gnuplot

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
gama(t) = F(x(t),y(t));
print "(, 3, ", gama(3),)", " , ", "(, 4, ", gama(4),)", "...
```

(b) $(V)(F)$ Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então

$$\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$$

é uma curva no espaço 3D e os comandos seguintes do gnuplot mostram alguns vetores tangentes ao gráfico da curva γ .

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
gama(t) = F(x(t),y(t));
a = -3;
set arrow from 0,0 to x(a), y(a);
b = -3;
set arrow from 0,0 to x(b), y(b);
splot F(x,y);
```

(c) $(V)(F)$ Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então

$$\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$$

é uma curva no espaço 3D e os comandos seguintes do gnuplot mostram alguns vetores tangentes ao gráfico da curva γ .

```

pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
gama(t) = (x(t), y(t), F(x(t),y(t)));
t1 = -3; a1 = x(t1); b1 = y(t1); z1 = F(a1, b1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(x(t1),y(t1))*dx(t1) + D_yF(x(t1),y(t1))*dy(t1);
set arrow from a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y), gama(t);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";

```

- (d) $(V)[\](F)[\]$ Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ é uma curva no espaço 3D.

Suponha que com um programa você gerou um arquivo chamado “dados”, contendo os pontos $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ com uma certa frequência definida por um passo δ . Os comandos seguintes do gnuplot mostram um vetor tangente ao gráfico da curva γ .

```

pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
g(t) = F(x(t),y(t));
t1 = -3;
a1 = x(t1); b1 = y(t1); z1 = g(t1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(a1,b1)*p1 + D_yF(a1,b1)*q1;
set arrow from a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";

```

- (e) $(V)[\](F)[\]$ Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ é uma curva no espaço 3D.

Suponha que com um programa você gerou um arquivo chamado “dados”, contendo os pontos $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ com uma certa frequência definida por um passo δ . Os comandos seguintes do gnuplot mostram um vetor tangente ao gráfico da curva γ .

```

pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = - 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);

```

```

z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
g(t) = F(x(t),y(t));
t1 = -3;
a1 = x(t1); b1 = y(t1); z1 = g(t1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(a1,b1)*p1 + D_yF(a1,b1)*q1;
set arrow from a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";

```

3. Curva no espaço

Se $z = F(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$ e $t \mapsto \alpha(t)$ for uma curva plana então

- (a) $(V)[\](F)[\]$ $g(t) = F(\alpha(t))$ é uma função univariada.

- (b) $(V)[\](F)[\]$ $t \mapsto \gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ é uma variedade de dimensão 1 imersa na variedade tridimensional \mathbf{R}^3 cuja projeção no plano XOY é a curva

$$t \mapsto \alpha(t);$$

- (c) $(V)[\](F)[\]$ A derivada da curva γ é a curva $t \mapsto (\alpha'(t), g'(t))$.

- (d) $(V)[\](F)[\]$ Dado um valor para $t = a$ então o vetor $(\alpha'(a), g'(a))$ é paralelo a um vetor tangente ao gráfico de γ .

- (e) $(V)[\](F)[\]$ Dado um valor para $t = a$ então o vetor

$$(\alpha(a), g(a)) + (\alpha'(a), g'(a))$$

é tangente ao gráfico de γ no ponto $(\alpha(a), g(a))$.

4. Integral de curvas

Sendo $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ e $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ em que x, y são duas funções diferenciáveis, então

- (a) $(V)[\](F)[\]$ $g(t) = F(x(t), y(t))$ é uma função univariada que é diferenciável.

- (b) $(V)[\](F)[\]$ Nas condições do item anterior,

$$g'(t) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t);$$

- (c) $(V)[\](F)[\]$ g' definida no item anterior é uma função univariada.

- (d) $(V)[\](F)[\]$ Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a);$$

(e) $(V)[\](F)[\]$ Suponha que $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, então $\int_0^{2\pi} g'(t)dt = 0$

5. integral de curvas

Seja $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ e $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ em que x, y são duas funções diferenciáveis, então

(a) $(V)[\](F)[\]$ Então $t \mapsto \gamma(t) = (\alpha(t), F(x(t), y(t)))$ é uma função univariada do tipo “função vetorial de variável real”, quer dizer, transforma um número num vetor do \mathbf{R}^3 . $\text{graf}(\gamma)$ é uma variedade de dimensão 1.

(b) $(V)[\](F)[\]$ Podemos calcular a integral $\int_a^b \gamma(t)dt$ em que γ está definida no item 5a sendo o resultado o vetor

$$\left(\int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b F(x(t), y(t))dt \right)$$

(c) $(V)[\](F)[\]$ $\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t)dt$ é um número real, em que γ está definida no item 5a.

(d) $(V)[\](F)[\]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t)dt = \left(\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt, \int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt, \int_{-\pi}^{\pi} F(x(t), y(t))dt \right) = (0, 0, 2\pi)$$

é um vetor do \mathbf{R}^3 .

(e) $(V)[\](F)[\]$ A derivada $\gamma'(t)$ existe e vale

$$(\alpha'(t), F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t));$$

γ está definida no item 5a.

6. integral de curvas

Seja $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ e $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ em que x, y são duas funções diferenciáveis, então

(a) $(V)[\](F)[\]$ $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t)))$ é um curva plana.

(b) $(V)[\](F)[\]$ $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t))) \cdot \alpha'(t)$ é uma função univariada. O produto indicado com o símbolo “ \cdot ” é o produto escalar.

(c) $(V)[\](F)[\]$ $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t))) \times \alpha'(t)$ é uma curva no espaço \mathbf{R}^3 . O produto indicado com o símbolo “ \times ” é o produto vetorial.

(d) $(V)[\](F)[\]$ Se $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ for uma curva diferenciável então $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) \cdot \gamma'(t)$ é uma função univariada. O produto indicado com o símbolo “ \cdot ” é o produto escalar.

(e) $(V)[\](F)[\]$ A integral $\int_a^b \gamma(t) \cdot \gamma'(t)dt$ é um número e se

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

então

$$\int_a^b \gamma(t) \cdot \gamma'(t)dt = 0;$$

O produto indicado com o símbolo “ \cdot ” é o produto escalar.

7. Curva de nível

Seja $z = F(x, y)$ uma função diferenciável e $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ em que x, y são duas funções diferenciáveis, então

(a) $(V)[\](F)[\]$ $F(x, y) = c$, em que c é uma constante dada, pelo Teorema da Função Implícita, é uma variedade de dimensão 1 e pode ter uma curva por solução, chamada de “curva de nível c de F ”.

(b) $(V)[\](F)[\]$ A curva definida no item 7a é uma curva contida no plano XOY , no domínio de F .

(c) $(V)[\](F)[\]$ Calculando a derivada implícita de $F(x, y) = c$ podemos concluir que o gradiente de F é perpendicular a qualquer curva de nível.

(d) $(V)[\](F)[\]$ Suponha que $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t)$ seja uma curva diferenciável do plano XOY então $[a, b] \ni t \mapsto (\gamma(t), F(\gamma(t)))$ é uma curva diferenciável do espaço \mathbf{R}^3 colocada sobre o gráfico de F .

(e) $(V)[\](F)[\]$ É possível calcular a integral $\int_a^b (\gamma(t), F(\gamma(t)))dt$ e o resultado é um número real.

8. Curvas com gnuplot O símbolo ∇ representa o gradiente. Sendo

$$z = F(x, y)$$

uma função diferenciável e

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

em que x, y são duas funções diferenciáveis, então

(a) $(V)[\](F)[\]$ $\frac{d}{dt} F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt}$

(b) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$ não tem sentido porque não está definida a multiplicação entre dois vetores.

(c) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))$ A derivada implícita de $G(t) = F(\alpha(t))$ mostra que podemos dar um sentido ao produto de vetores que aparece no item 8b como um produto escalar $\nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$

(d) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))$ A derivação implícita usada no item 8c mostra que

$$\nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

é um diferencial total (uma derivada) e neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = F(x(a), y(a)) - F(x(b), y(b))$$

(e) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))$ A derivação implícita usada no item 8c mostra que

$$F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

é um diferencial total (uma derivada) e neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))$$

9. Curvas com gnuplot

Seja $w = F(x, y, z)$ uma função diferenciável e

$$t \mapsto (\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)))$$

em que x, y, z são três funções diferenciáveis, então

(a) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))$ A derivada implícita de $F(x, y, z) = d$ em que d é uma constante, mostra que ∇F é perpendicular às superfícies de nível $F(x, y, z) = d$ quando estas existirem.

(b) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))$ A função $[a, b] \ni t \mapsto (\alpha(t), F(\alpha(t)))$ é uma curva diferenciável no espaço $4D$

(c) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))$ $\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = (\alpha'(t), \nabla F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t))$

(d) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))$ Parte do cálculo no item 9c sugere o cálculo de um coeficiente de variação que fica representado pela expressão perfeitamente calculável $\nabla F(\alpha(t)) \cdot \gamma(t)$. Esta expressão será otimizada quando $\gamma(t)$ tiver a mesma direção do gradiente.

(e) $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))$ Suponha que seja possível definir

$$[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t)$$

correspondendo a cada valor de t um vetor unitário na direção de ∇F . Então a integral

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \gamma(t) dt$$

está bem definida e é um número real.