



**Cálculo Multivariado
integração múltipla**

T. Praciano-Pereira

alun@:

Lista numero 02

tarcisio.praciano@gmail.com

Dep. de Computação

20 de março de 2013

Univ. Estadual Vale do Acaraú

Documento escrito com L^AT_EX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

<http://www.multivariado.sobralmatematica.org>

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Esta lista ainda não está pronta, eu a estou publicando enquanto a estou editando para que você tenha material de trabalho. Quando estiver pronta esta observação irá desaparecer. Não imprima enquanto esta observação estiver aqui.

Exercícios 1 *Integração múltipla objetivo: Entender domínio de integração*
palavras chave: *domínio de integração, integral aproximada, integral iterada, integral múltipla, soma de Riemann, soma de Riemann dupla.*

1. Integral Dupla

Sendo $F(x, y) = xy \sin(2 - x - y)$

(a) (V)[](F)[] O domínio de integração em

$$\int_{-4}^4 \int_{-3}^{10} F(x, y) dx dy$$

é o retângulo $[-4, 4] \times [-3, 10]$;

(b) (V)[](F)[] O domínio de integração em

$$\int_{-4}^4 \int_{-3}^{10} F(x, y) dx dy$$

é o retângulo $[-3, 10] \times [-4, 4]$

(c) (V)[(F)] O domínio de integração em

$$\int_{-4}^4 \int_{y+4}^{y-10} F(x, y) dx dy$$

é a região do plano limitada pelas retas

$$x = -4; x = 4; x = y + 4; x = y - 10;$$

(d) (V)[(F)] Para calcular a integral de $z = F(x, y)$ sobre o domínio limitado pelas curvas

$$y^2 - 5 - x = 0; x - 15 + y^2 = 0; x = 4; x = -4$$

devo expressar a integral como

$$\int_{-4}^4 \int_{y^2-5}^{y^2-15} F(x, y) dy dx$$

e um valor aproximado desta integral é 17.33270527525958855238

(e) (V)[(F)] Para calcular a integral de $z = F(x, y)$ sobre o domínio limitado pelas curvas

$$y^2 - 5 - x = 0; x - 15 + y^2 = 0; x = 4; x = -4$$

devo expressar a integral como

$$\int_{-a}^a \int_{y^2-5}^{y^2-15} F(x, y) dx dy ; a = \sqrt{10};$$

e um valor aproximado desta integral é 9.90208423471979144793 com passo $\Delta x = \Delta y = 0.005$ obtido com 2m11.173s de processamento pelo programa `exer06_01_d.calc`. O programa tem as duas opções para calcular no sentido “ $dx dy$ ” ou no sentido “ $dy dx$ ”, `integral_dxdy()`, `integral_dydx()` mas você tem que, eventualmente, completar alguns dos cálculos no programa. A figura (1) página 3, mostra o domínio de integração, gráfico feito com `gnuplot`

```
exer06_01_d.gnuplot}
```

```
~9.16353940918169888055
```

```
real    81m36.796s
user    74m22.315s
sys     5m53.562s
tarcisio@cap01:~/multi$
```

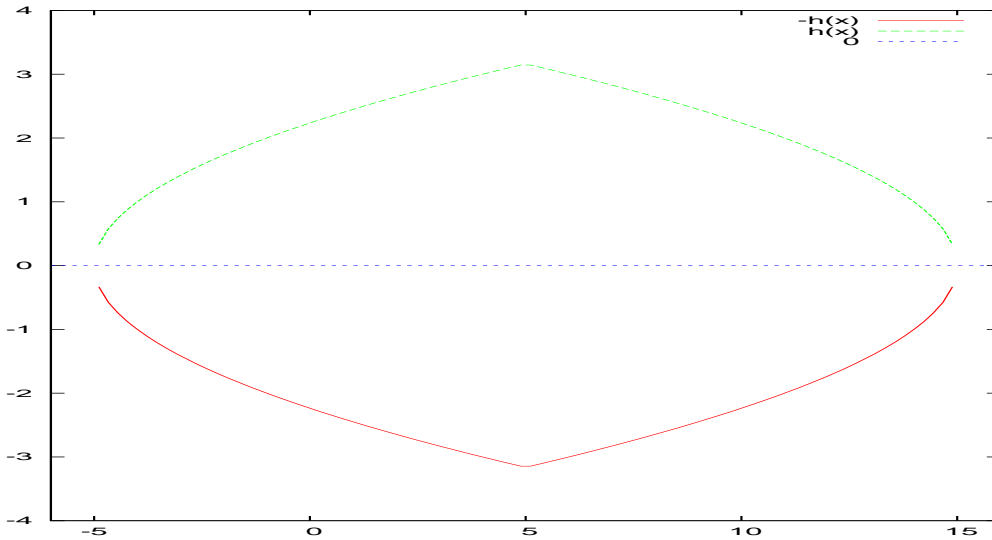


Figura 1:

2. Coordenadas polares e a Gaussiana

Considere a função $H(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

(a) (V)[](F)[] Definindo $h(x) = e^{x^2}$ então $H(x, y) = h(x)h(y)$

(b) (V)[](F)[] Definindo $h(x) = e^{-x^2}$ então $H(x, y) = h(x)h(y)$

(c) (V)[](F)[] Definindo $h(x) = e^{-x^2}$ então

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a H(x, y) dx dy = \left(\int_{-a}^a h(x) dx \right)^2$$

(d) (V)[](F)[] Suponha que seja possível calcular (que exista a integral), e é verdade,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) dx dy$$

Considere a mudança de variável descrita pelas equações (coordenadas polares)

$$T(\rho, \theta) = (x, y); \tag{1}$$

$$T(\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \tag{2}$$

$$\rho \in [0, \infty); \theta \in [0, 2\pi] \tag{3}$$

Usando a derivada exterior definida na lista 05, então

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} H(T(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta \tag{4}$$

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} 2\rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} 2\rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \quad (5)$$

$$I = \pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} 2\rho d\rho = \pi \quad (6)$$

(e) (V) (F) Como

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2$$

então

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

3. Integrais Duplas

(a) (V) (F) A área limitada pelo gráfico da primeira bissetriz e da parábola $y = x^2$ é

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^x dy dx$$

(b) (V) (F) A área limitada pelo gráfico da parábola $y = x^2 - x - 6$ e a reta $y = 7$ é

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{x^2-x-6}^7 dy dx$$

para os dois números x_1, x_2 obtidos como raízes de uma equação do segundo grau.

(c) (V) (F) O sólido V é um cilindro tendo por base a região limitada pelo gráfico da parábola $y = x^2 - x - 6$ e a reta $y = 7$ e altura (constante) 4. Seu volume é quatro vezes a integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{x^2-x-6}^7 dy dx$$

(d) (V) (F) Uma pirâmide tem por base o triângulo cujos vértices são $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e quarto vértice é o ponto $(0, 0, r)$. O seu volume pela integral da equação do plano (da função $z = F(x, y)$) que passa nos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0, r)$.

Cálculo do vetor perpendicular e determinação da função $z = F(x, y)$.

$$\text{vértices } P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 0), P_3 = (0, 1) \text{ e } P_4 = (0, 0, r) \quad (7)$$

$$u_1 = P_2 - P_4 = (1, 0, -r); u_2 = P_3 - P_4 = (0, 1, -r) \quad (8)$$

$$u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -r \\ 0 & 1 & -r \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$u_1 \times u_2 = (-r \quad r \quad 1) \quad (10)$$

A equação do plano que fecha a pirâmide, passando pelo ponto $(0, 0, r)$ é

$$-rx + ry + (z - r) = 0 \Rightarrow z = F(x, y) = r + rx - ry$$

e a integral que dá o volume da pirâmide é

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (r + rx - ry) dy dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (r + rx - ry) dy$$

Calculando a integral

$$I_x = \int_0^{1-x} (r + rx - ry) dy \quad (11)$$

$$I_x = \left((r + rx)y - r\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} = (r + rx)(1 - x) - r\frac{(1-x)^2}{2} \quad (12)$$

$$I_x = r(1 + x)^2 - r\frac{(1-x)^2}{2} = r\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{r}{2}(1 - 2x + x^2) \quad (13)$$

$$I = \frac{r}{2}(x - x^2 + \frac{x^3}{3}) \Big|_0^1 = \frac{r}{2}(1 - 1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}r \quad (14)$$

- (e) (V) (F) Uma pirâmide tem por base o triângulo cujos vértices são $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ e quarto vértice é o ponto $(0, 0, r)$. O seu volume pela integral da equação do plano (da função $z = F(x, y)$) que passa nos pontos $(1, 0), (0, 1), (0, 0, r)$.

Cálculo do vetor perpendicular e determinação da função $z = F(x, y)$.

$$\text{vértices } P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 0), P_3 = (0, 1) \text{ e } P_4 = (0, 0, r) \quad (15)$$

$$u_1 = P_2 - P_4 = (1, 0, -r); u_2 = P_3 - P_4 = (0, 1, -r) \quad (16)$$

$$u_1 \times u_2 = (r \quad r \quad 1) \quad (17)$$

A equação do plano que fecha a pirâmide, passando pelo ponto $(0, 0, r)$ é

$$rx + ry + (z - r) = 0 \Rightarrow z = F(x, y) = r - rx - ry$$

e a integral que dá o volume da pirâmide é

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (r - rx - ry) dy dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (r - rx - ry) dy$$

Calculando a integral

$$I_x = \int_0^{1-x} (r - rx - ry)dy \quad (18)$$

$$I_x = r(1-x)^2 - r\frac{(1-x)^2}{2} \quad (19)$$

$$I = \frac{r}{2}(x - x^2 + \frac{x^2}{3})|_0^1 = \frac{r}{2}(1 - 1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}Bh \quad (20)$$

4. Integral Dupla Quero calcular a integral de $\int \int_W F(x,y)dxdy$ com

$$F(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$$

- (a) (V)[](F)[] sobre o domínio W , o disco unitário com centro no ponto $(-3,3)$ e o programa `riemandedupla()` faz isto.
- (b) (V)[](F)[] sobre o domínio W , o disco unitário com centro no ponto $(-3,3)$ e o programa `riemandedupla()` faz isto se chamado de forma conveniente.
- (c) (V)[](F)[] sobre o domínio W , o disco unitário com centro no ponto $(-3,3)$ e o programa `riemandedupla()` teria que ser alterado para fazer este cálculo, porque a condição de seleção dos retângulos não serviria para este caso.
- (d) (V)[](F)[] o símbolo que resolve este cálculo seria

$$\int_{-4}^{-2} \int_f^g F(x,y)dxdy$$

com $f(x) = -\sqrt{1 - (x - 3)^2}$; $g(x) = \sqrt{1 - (x - 3)^2}$.

(e) (V)[](F)[] o símbolo que resolve este cálculo seria

$$\int_{-4}^{-2} \int_f^g F(x,y)dydx$$

com $f(x) = -\sqrt{1 - (x + 3)^2}$; $g(x) = \sqrt{1 - (x + 3)^2}$.

5. Integração múltipla Se $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ então

- (a) (V)[](F)[] F é uma função negativa.
- (b) (V)[](F)[] $\int \int_W F(x,y)dxdy$ será sempre um número positivo para qualquer domínio W não vazio.
- (c) (V)[](F)[] $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x,y)dxdy = \frac{8}{3}$

$$(d) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dx dy = 0$$

$$(e) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dx dy = 10$$

6. Se $F(x, y) = -(x + y)$

Integração múltipla

$$(a) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) dx dy = \frac{4}{3}$$

$$(b) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) dx dy = -\frac{4}{3}$$

$$(c) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) dx dy = -2$$

$$(d) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) dx dy = -3$$

$$(e) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) dx dy = 3$$

7. Integração múltipla Se $F(x, y) = x^2 + y^2$ então

$$(a) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dy dx$$

$$(b) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dx dy = \frac{8}{3}$$

$$(c) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dx dy = -\frac{8}{3}$$

$$(d) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dx dy = \frac{1}{3}$$

$$(e) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dx dy = 0$$

8. Se $F(x, y) = x + y$ então

Integração múltipla

$$(a) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_0^1 \int_0^f F(x, y) dy dx = 5; \text{ em que } f(x) = x.$$

$$(b) \underline{(V)}[\](F)[\] \int_0^1 \int_0^f F(x, y) dy dx = -5; \text{ em que } f(x) = x.$$

$$(c) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^1 \int_0^f F(x, y) dy dx = -1; \text{ em que } f(x) = x.$$

$$(d) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^1 \int_0^f F(x, y) dy dx = 1; \text{ em que } f(x) = x.$$

$$(e) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^1 \int_0^f F(x, y) dy dx = 1/2; \text{ em que } f(x) = x.$$

9. Integração múltipla O domínio W de integração é a região do plano delimitada pelo eixo OX pela parábola $y = f(x) = x^2$ e pelas retas $x = -4; x = 4$. Se $F(x, y) = x^2 + x \cos(y)$

$$(a) \underline{(V)}[](F)[] \int_{-4}^4 \int_0^f F(x, y) dx dy \text{ é o cálculo desejado.}$$

$$(b) \underline{(V)}[](F)[] \int_{-4}^4 \int_0^f F(x, y) dy dx \text{ é o cálculo desejado.}$$

$$(c) \underline{(V)}[](F)[] \int_{-4}^4 \int_0^f F(x, y) dy dx = \int_{-4}^4 (x^4 - x \operatorname{sen}(x^2)) dx \text{ desejado.}$$

$$(d) \underline{(V)}[](F)[] \int_{-4}^4 \int_0^f F(x, y) dy dx = 0$$

$$(e) \underline{(V)}[](F)[] \int_{-4}^4 \int_0^f F(x, y) dy dx = -5$$

10. integral simples

$$(a) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^1 \cos^2(x) + \sin^2(x) dx = 1$$

$$(b) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^\pi \cos^2(x) + \sin^2(x) dx = \pi$$

$$(c) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x) dx = 2\pi$$

$$(d) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$$

$$(e) \underline{(V)}[](F)[] \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$$