Calculo II **Lista número zero B**, 6 de agosto de 2010
Ainda revisão **tarcisio.praciano@gmail.com**
prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.multivariado.sobralmatematica.org

Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 16 de Agosto, segunda-feira.

Objetivo Rever os conceitos de Cálculo I

Palavras chave média integral, média aritmética ponderada, pesos, teorema do valor médio para derivada, soma de Riemann

Exercícios

1. soma de Riemann - aproximação da integral
   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x$
   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)$
   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$
2. Médias - aritmética simples e ponderada
   (a) (V)[ ](F)[ ] A média entre dois números P, Q é qualquer número M tal que $P \leq M \leq Q$.
   (b) (V)[ ](F)[ ] A média entre dois números P, Q é um único número M tal que $M = \frac{P+Q}{2}$.
   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $s_1+s_2+s_3+s_4 = 1$ então $s_1p_1+s_2p_2+s_3p_3+s_4p_4$ é uma média entre os números p_1, p_2, p_3, p_4 relativamente aos pesos s_1, s_2, s_3, s_4 .
   (d) (V)[ ](F)[ ] Se $s_1+s_2+s_3+s_4 = 1$ tal que $s_i \geq 0$ então
   $$s_1p_1+s_2p_2+s_3p_3+s_4p_4$$
   é uma média entre os números p_1, p_2, p_3, p_4 relativamente aos pesos s_1, s_2, s_3, s_4, tomados nesta ordem, chamada "*média aritmética ponderada*".

   (e) (V)[ ](F)[ ]
3. Soma de Riemann e média
   Notação:
   $$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (1)$$
   $$x_0 = a, x_1 = a+\Delta x, \dots \quad (2)$$
   $$\dots x_k = a+k\Delta x \dots \quad (3)$$
   $$\dots x_n = a+n\Delta x = b \quad (4)$$
   Então
   (a) (V)[ ](F)[ ] $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$ é uma soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$.
   (b) (V)[ ](F)[ ] $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = b-a$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$ é uma média aritmética ponderada de uma seleção uniforme de valores de f no intervalo $[a, b]$.
   (d) (V)[ ](F)[ ] $\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$ é uma média aritmética ponderada de uma seleção uniforme de valores de f no intervalo $[a, b]$.
   (e) (V)[ ](F)[ ] Como uma soma de Riemann relativa ao intervalo $[a, b]$ é uma aproximação para a integral de uma função neste intervalo então $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ é um valor médio de f no intervalo $[a.b]$ chamado "valor médio integral de f no intervalo $[a, b]$.
4. A derivada da função inversa
   Se
   $$f(x) = Atan(x) \quad (5)$$
   $$y = g(x) = \tan(x) \quad (6)$$
   então $f(g(x)) = x$ portanto f, g é um par de funções inversas.
   (a) (V)[ ](F)[ ] $(f(g(x)))' = f(g'(x))g(x)$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $(f(g(x)))' = (x)' = 1$
   (d) (V)[ ](F)[ ] $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$g'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} \tag{7}$$

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \tag{8}$$

$$f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} = cos^2(x) \tag{9}$$

$$y = g(x) = \tan(x) \quad \Rightarrow \quad cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2} \tag{10}$$

$$f'(y) = \frac{1}{1+y^2} \tag{11}$$

5. A parábola tangente O polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$$

coincide com $f(x) = 2sin(3x+4)$ no ponto ponto $a = 1$ de tal modo que $P'(a) = f'(a)$ e $P''(a) = f''(a)$. Então

(a) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = f(a)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = f'(a)$

(c) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = f(a)$

(d) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = f''(a)$

(e) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = \frac{1}{2}f''(a)$

Faça o gráfico de $f(x), P(x)$ com gnuplot mas use os comandos que se encontram a seguir. Observe que estou usando derivadas aproximadas de primeira e segunda ordem (os operadores quociente de primeira e segunda ordem).

```
a = 2 ## trocando este valor você pode obter a parábola em outros pontos.
f(x) = 2*sin(3*x + 4) ;
rho = 0.00001;
Q_rho_f(x) = (f(x+rho)-f(x))/rho; # operador quociente
Q2_rho_f(x) = (Q_rho_f(x+rho) - Q_rho_f(x))/rho # op. quoc. de segunda ordem
a0 = f(a); a1 = Q_rho_f(a); a2 = Q2_rho_f(a);
P(x) = a0 + a1*(x-a) + 0.5*a2*(x-a)**2;
set xrange [0:3]
set yrange [-3:3]
plot f(x),0, P(x)
pause -2
```

6. Na questão 5 você obteve, com `gnuplot`

(a) (V)[ ](F)[ ] o gráfico de uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(b) (V)[ ](F)[ ] o gráfico de uma parábola tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(c) (V)[ ](F)[ ] A expressão do polinômio do segundo grau cujo gráfico tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2$$

(d) (V)[ ](F)[ ] A expressão do polinômio do segundo grau cujo gráfico tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Uma das fórmulas acima generaliza a fórmula da reta tangente ao gráfico de f para obtermos o gráfico da parábola tangente ao gráfico de f. Esta fórmula vai nos permitir de cálcular o ponto de queda de uma pedra que se encontrava rodando presa a um cordão e que se "liberou" quando o cordão se partiu.

Eu disse, numa das primeiras aulas, que ainda poderiamos calcular o ponto de queda da pedra depois de quebrado o cordão... falta um detalhe para podermos calcular, é a derivada da equação do círculo que vai ser assunto da uma próxima lista. Não percam!

7. A derivada da função inversa $Asin(x)$. Se $f(x) = Asin(x)$ e $y = g(x) = \sin(x)$ então $f(g(x)) = x$ portanto f, g é um par de funções inversas.

(a) (V)[ ](F)[ ] $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $(f(g(x)))' = (x)' = 1$

(c) (V)[ ](F)[ ] $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$

(d) (V)[ ](F)[ ] $f'(g(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$f'(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = f'(\sin(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Conclusão: A derivada de $f(x) = Asin(x)$ é $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. Sendo $f(x) = sin(x)$ então as derivadas sucessivas de f (*consideramos a derivada de ordem zero a própria função*) calculadas no ponto $a = 0$ são

(a) (V)[ ](F)[ ] $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$

(b) (V)[ ](F)[ ] $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\{-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$

9. Se $f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega)$ em que A, B, ω são constantes, então

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $f''(x) = \omega^2 f(x)$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $f''(x) = -f(x)$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $f''(x) = -f'(x)$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $f''(x) = -\omega^2 f(x)$

10. Faça o gráfico da função $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$ detatalhadamente, explicando todas as passagens com uso da derivada.

11. Calcule a derivada da função $y = g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e depois faça o gráfico desta função cuidadosamente, explicando todas as passagens.

12. Calcule a derivada da função $y = r(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e depois faça o gráfico desta função cuidadosamente, explicando todas as passagens.

13. Calcule a derivada de $y = p(x) = -3cos^5(x) + 10cos^2(x) - 15cos(x)$

14. Dois carros de corrida, A, B, que tem a mesma potência, se emparelham num curva no ponto x_0 do autódromo. Depois disto o piloto do carro B observou que seu carro estava com um entupimento de valvulas perdendo potência e consequentemente velocidade. Finalmente o carro B perdeu a corrida. Faça um gráfico simulando a corrida dos dois carros a partir do ponto x_0.

15. Calcule as derivadas das funções abaixo e diga onde são contínuas

a) $f(x) = cos(x+3)$	b) $f(x) = sin(3x+7)$	c)$f(x) = \frac{sin(x+3)}{cos(4-x)}$
d) $\frac{sin(x)}{1+x^2}$	e)$f(x) = \frac{2xsin(x)}{1+x^2}$	f) $\frac{x^2+3*x+2}{1+x^2}$

16. A função $f(x) = \sqrt{x}$ é a inversa da função $g(x) = x^2$ justifique esta afirmação com uma conta adequada. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ e indique o domínio de validade.

17. A função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é a inversa da função $g(x) = x^3$ justifique esta afirmação com uma conta adequada. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e indique o domínio de validade.

18. A função $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ pode ser vista como a composição de funções. Explicite isto e calcule a derivada de $y = f(x)$.

19. Calcule a derivada de $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ indique qual é o domínio de validade de f e de f'. Faça o grafico de $y = f(x)$.

20. <u>Integral</u> Represente geometricamente (gráfico) e calcule as integrais:

a) $\int_{-3}^{10}(x+3)$ b) $\int_{3}^{10}(x+3)$ c) $\int_{10}^{-3}(x+3)$ d) $\int_{10}^{3}(x+3)$

e) $\int_{10}^{3}(3-x)$ f) $\int_{-3}^{10}(3-x)$ g) $\int_{3}^{10}(3-2x)$ h) $\int_{10}^{-3}(3-3x)$

i) $\int_{-3}^{10}\frac{3-2x}{4}$ j) $\int_{-3}^{10}\frac{3-2x}{5}$ k) $\int_{10}^{-3}\frac{1-3x}{2}$ l) $\int_{10}^{-3}-\frac{1-2x}{3}$

21. <u>Derivadas</u> Calcule as derivadas das funções

a) $f(x) = \tan(x)$ b) $f(x) = x\tan(x)$ c)$f(x) = \sin(x^2+3x)$

d) $f(x) = \tan(x^2+3x)$ e)$f(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$ f) $f(x) = \sin(Ax)$

g)$f(x) = \sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)$

h) $f(x) = \sin^3(x) + 3\sin^2(x)\cos(x) + 3\sin(x)\cos^2(x) + \cos^3(x)$

i)$f(x) = \sin^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) + 3\sin(x)\cos^2(x) - \cos^3(x)$